問題１　解答例　（HP 公開用）

（１）

$$y = c_1 e^{-x} + e^{x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$$

（２）

$$s = \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

（３）

$$V = \frac{4b^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

問題２　解答例　（HP 公開用）

（１）固有値をλ，単位行列を$\boldsymbol{E}$とすると，固有多項式は次式のようになる。

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & -1\\ -3 & \lambda-1 & 3\\ 2 & -2 & \lambda-5\end{vmatrix}=0$$

行列式を計算すると　$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)=0$　となり，

固有値は $1,3,4$ となる。

（２）固有値 λ_i (i = 1,2,3) に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とすると，

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ であるから，$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ となる。
固有値 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=4$ について，それぞれ上式を解くと，

固有ベクトルは　$\boldsymbol{x}_1=a\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_3=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ となる。

($a\neq0,b\neq0,c\neq0$)

（３）（２）の結果より，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$ となる。

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$　であり，　$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^3=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 64\end{bmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 64\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}38 & 26 & -11\\ 63 & 1 & -63\\ -26 & 26 & 53\end{bmatrix}$$

問題３　解答例　（HP 公開用）

（１）

$$I = \frac{1}{2} M r^2 \qquad (1)$$

（２）重心の運動方程式は

$$M\ddot{x} = M\mathrm{g} \cdot \sin\alpha - F \qquad (2)$$

$$M\ddot{y} = N - M\mathrm{g} \cdot \cos\alpha \qquad (3)$$

回転の運動方程式は

$$I\dot{\omega} = rF \qquad (4)$$

（３）

$$\dot{x} = r\omega \qquad (5)$$

（４）式(5)を微分すると

$$\ddot{x} = r\dot{\omega} \qquad (6)$$

式(1)，(2)，(4)，(6)を整理すると

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\mathrm{g} \cdot \sin\alpha$$

これをtについて積分すると

$$\dot{x} = \frac{2}{3}\mathrm{g} \cdot \sin\alpha \cdot t + C_1$$

$$x = \frac{1}{3}\mathrm{g} \cdot \sin\alpha \cdot t^2 + C_1 t + C_2$$

ここでC_1, C_2は積分定数である。

また，$t = 0$で$\dot{x} = 0$，$x = 0$なので$C_1 = C_2 = 0$

よって，t秒後の円板の速度$\dot{x}$および移動距離xは

$$\dot{x} = \frac{2}{3}\mathrm{g} \cdot \sin\alpha \cdot t$$

$$x = \frac{1}{3}\mathrm{g} \cdot \sin\alpha \cdot t^2$$