2021年10月，2022年4月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題

問題用紙

Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

Question Sheets

（2021年8月26日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅰ） Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

試験時間：09時00分～12時00分 (Examination Time：From 09:00 to 12:00)

受験上の注意事項

(1) これは問題用紙です。解答は別冊の解答用紙に記入してください。
(2) 問題用紙は表紙を含み8枚あります。
(3) 本表紙およびすべての問題用紙に受験番号を記入してください。
(4) 問題用紙は解答用紙とともに回収します。

Notices

(1) This booklet consists of only question sheets. Use another booklet for answers.
(2) This booklet consists of eight (8) sheets including this front sheet.
(3) Fill in your examinee's number in all sheets including this front sheet.
(4) Return these question sheets together with the answer sheets.

2021 年 10 月，2022 年 4 月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering（Master's Course），Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2021 年 8 月 26 日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ｉ) Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ｉ－1 (数学) (Mathematics)〔1/3〕

問題 1（Question 1）

1. 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ y & 0 & 0\\ -2 & 2 & y\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし x は負の整数，y は正の整数である。

(a) y は行列 A の固有値のひとつであることを示せ。
(b) x もまた行列 A の固有値のひとつであるとする。このとき，行列 A のもうひとつの固有値を求めよ。
(c) 上記(b)の条件下で $x+y=0$ であるとき，すべての固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ示せ。

2. 行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & 8 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

1. Answer the following questions about the matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ y & 0 & 0\\ -2 & 2 & y\end{pmatrix}$. Here x is a negative integer and y is a positive integer.

(a) Show that y is one of the eigenvalues for the matrix A.
(b) Let x be also one of the eigenvalues for the matrix A. Find the other eigenvalue for the matrix A.
(c) Show all the eigenvalues and the associated eigenvectors when $x+y=0$ under the above condition (b).

2. Find the inverse matrix for the matrix $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & 8 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ⅰ) Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅰ－1(数学)(Mathematics)〔2/3〕

問題2（Question 2）

領域 $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$ 上の２重積分，

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\,dxdy$$

について，以下の問いに答えよ。

(a) 積分領域を x-y 平面図に示し，その領域にハッチングをつけ，かつ，x，y 軸上の数値を記入せよ。

(b) ２次元極座標に変換し，２重積分 I を極座標 (r,θ) を用いて書き直せ。

(c) ２重積分 I を求めよ。

Answer the following questions about the double integral I on the region $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$.

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\,dxdy$$

(a) Show and hatch the domain of the integral at the x-y plane and express numerical values on the x and y axes.

(b) Convert to two-dimensional polar coordinates, then rewrite the double integral I using the polar cordinates, (r,θ).

(c) Calculate the double integral I.

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅰ） Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅰ－1（数学）(Mathematics)〔3/3〕

問題3（Question 3）

微分方程式

$y'' + ay' + by = 0$　　　(1)

について，以下の問いに答えよ。ただし，a, b は実数，A, Bは任意の定数とする。

(a) 式(1)の一般解が式(2)となるように a, b を決定せよ。

$y = A\exp x + B\exp 2x$　　　(2)

(b) 式(1)の一般解が式(3)となるように a, b を決定せよ。

$y = A\exp x + Bx\exp x$　　　(3)

(c) 式(1)の一般解が式(4)となるように a, b を決定せよ。

$y = A\exp x$　　　(4)

Regarding the differential equation

$y'' + ay' + by = 0,$　　　(1)

answer the following questions. Here, a and b are real numbers and A and B are arbitrary constants.

(a) Determine a, b so that general solution of equation (1) is equation (2).

$y = A\exp x + B\exp 2x$　　　(2)

(b) Determine a, b so that general solution of equation (1) is equation (3).

$y = A\exp x + Bx\exp x$　　　(3)

(c) Determine a, b so that general solution of equation (1) is equation (4).

$y = A\exp x$　　　(4)

2021年10月，2022年4月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering（Master's Course），Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)
（2021年8月26日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学(専門科目 I) Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

I −2(材料力学)(Mechanics of Materials)〔1/2〕

問題1（Question 1）

Fig. 1に示す半径 R の半円形断面をもつはりについて以下の問いに答えよ。

1. z'軸から任意の y' の距離にある微小領域の面積 dA を，R，θ および dy' を用いて表せ。
2. y' を R，θ を用いて表せ．また，$dy'/d\theta$ を求めた後，dy' を R，θ および $d\theta$ を用いて表せ。
3. z'軸に関する断面一次モーメント $S_{z'}$ を求めよ。
4. z'軸から図心 G までの距離 e を求めよ。
5. z'軸に関する断面二次モーメント $I_{z'}$ を求めよ。
6. z 軸に関する断面二次モーメント I_z を求めよ。

There is a beam of a semicircular cross section with radius R as shown in Fig. 1. Answer the following problems.

1. Describe the area of the infinitesimal element dA located at an arbitrary distance y' from the z'-axis using R, θ and dy'.
2. Describe y' using R and θ. Then, determine dy' using R, θ and $d\theta$ after obtaining $dy'/d\theta$.
3. Calculate the first moment of area $S_{z'}$ on the z'-axis.
4. Obtain the distance e from the z'-axis to the center of figure G.
5. Calculate the second moment of area $I_{z'}$ on the z'-axis.
6. Calculate the second moment of area I_z on the z-axis.

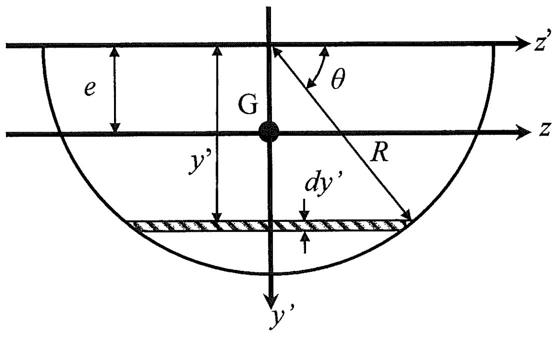


Fig.1

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ⅰ) Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅰ－2(材料力学)(Mechanics of Materials)〔2/2〕

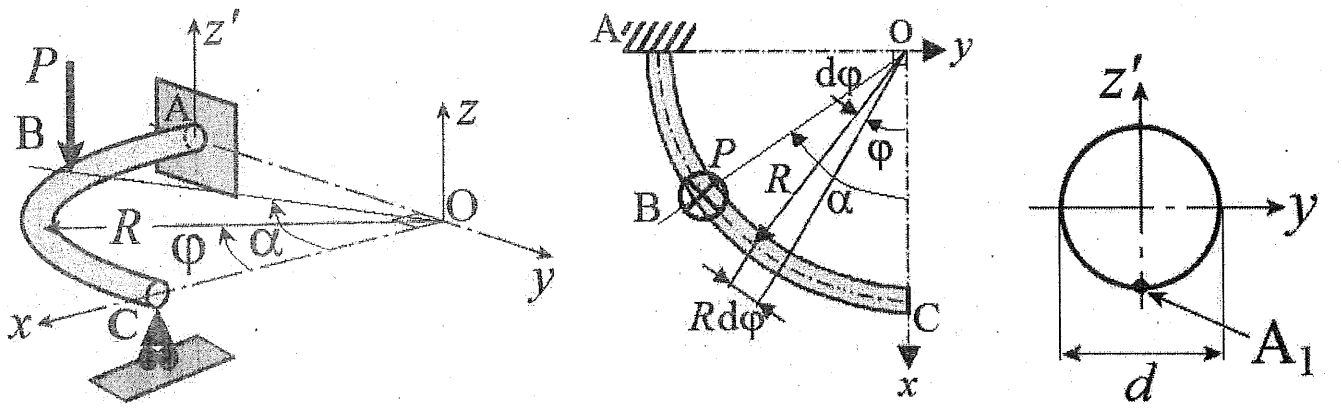
問題2（Question 2）

Fig. 2 に示すように，x-y 平面内にある直径 d の円形断面と半径 R を持つリングの 1/4 部分 AC の一端 A を固定支持し，他端 C を移動支持する．加えて，x 軸から角度αの位置にある点 B において z 軸に沿って下向きに集中外力 P を作用させる。以下の問いに答えよ。このとき，点 C における支持力を R_C，リングの縦弾性係数を E，横弾性係数を G とする。

1. 任意の角度φにおいて，P および R_C を用いてリングの横断面に作用する曲げモーメント M およびねじりモーメント T を求めよ。また，断面 A に作用する曲げモーメント M_A およびねじりモーメント T_A を求めよ。
2. Fig. 2(c)に示す点 A の断面上の点 A_1 における曲げ応力σおよびねじりによるせん断応力τを求めよ。
3. 点 A_1 における最大主応力σ_1ならびに最大主せん断応力τ_1を求めよ。
4. リングの 1/4 部分 AC に蓄えられるひずみエネルギーUを求めよ。
5. カスチリアーノの定理を用いて R_C を求めよ。

As shown in Fig. 2, a quarter part AC of a ring with a radius R and diameter d of a circular cross-section in x-y plane is fixed at the point A and simply supported at the point C. In addition, concentrated external force P in a negative direction of z-axis is applied at the point B with the angle α from the x-axis. Here, R_C is the supporting force at the point C, and the longitudinal and transverse elastic moduli of AC are E and G, respectively.

1. Obtain the bending moment M and the torsional torque T acting on the cross-section at an arbitrary angle φ by using P and R_C. Additionally, determine the bending moment M_A and the torsional moment T_A applied at the point A.
2. Derive the bending stress σ and the shear stress τ by torsion at point A_1 as indicated in Fig. 2(c) on the cross-section A of the ring.
3. Calculate the maximum principal stress σ_1 and the maximum principal shear stress τ_1 at the point A_1.
4. Determine the stored strain energy U of the part AC of the ring.
5. Obtain R_C by the Castigliano's theorem.



(a) 鳥瞰図(Bird eye's view)　(b) 上面図(Top view)　(c) 点Aにおける断面図 (The cross-section at the point A)

Fig. 2

2021年10月，2022年4月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering（Master's Course），Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2021年8月26日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ｉ） Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ｉ－3（機械力学）(Mechanical Vibrations)〔1/2〕

問題1（Question 1）

Fig. 1のように，自然長L，ばね定数kのばねによって，質量mの物体Aが支持されている。物体Aは鉛直方向にのみ運動するものとし，床から物体Aまでの距離をyとする。物体Aには回転体が付加されており，その角速度ωに応じて，回転体から物体Aに鉛直方向の力$f_e = b\omega^2\cos\omega t$が加わるとする。ここで$t$は時刻，$b$は正の定数であり，$f_e$は下向きを正とする。また，重力加速度を$g$とする。ここでは，自由振動がすでに減衰して強制振動のみが残っている定常状態を考えるものとする。

(1) 物体Aの運動方程式を書け。
(2) 物体Aの変位の振幅A_yを角速度ωの関数として表せ。また，その関数のグラフの概形を描け。その際，A_yの$\omega \to 0$と$\omega \to \infty$における極限を明記すること。
(3) ばねから床へ加えられる力fの変動の振幅A_fをωの関数として表せ。また，その関数のグラフの概形を描け。その際，A_fの$\omega \to 0$と$\omega \to \infty$における極限を明記すること。
(4) bは与えられており，ωは十分に大きいとする。A_yとA_fの両方を小さくしたいとき，mとkの値をどのように設定すればよいか。簡潔な一文（15～30文字程度）で答えよ。

Consider the system shown in Fig. 1. The object A with the mass m is supported by a spring with the natural length L and the spring coefficient k. The object A is assumed to move only in the vertical direction, and the distance from the floor to the object A is denoted by y. A rotating object with the angular velocity ω is attached to the object A. The rotating object applies the force $f_e = b\omega^2\cos\omega t$ to the object A where t is time, b is a positive constant and f_e is measured positive downward. The gravitational acceleration is denoted by g. Assume that the system is in the steady state where the free vibration is already damped and only the forced vibration is left.

(1) Write the equation of motion of the object A.
(2) Write the displacement amplitude A_y of the object A as a function of the angular velocity ω. Also, illustrate the graph of the function. In the graph, the limits of A_y as $\omega \to 0$ and $\omega \to \infty$ must be clearly indicated.
(3) Write the amplitude A_f of the force that is transmitted to the floor as a function of the angular velocity ω. Also, illustrate the graph of the function. In the graph, the limits of A_f as $\omega \to 0$ and $\omega \to \infty$ must be clearly indicated.
(4) Assume that b is given and ω is sufficiently high. If both A_y and A_f need to be small, how should the values of m and k be chosen? Answer in a single brief sentence of around seven to fifteen words.

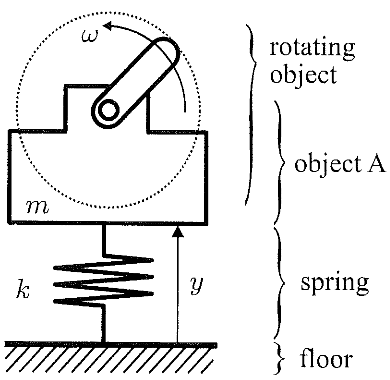


Fig. 1

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ｉ) Mechanical Engineering I	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ｉ－3(機械力学)(Mechanical Vibrations)〔2/2〕

問題 2（Question 2）

Fig. 2 に示すように，両端をばねで支持された一様な断面形状と質量密度を持つ剛体の棒の運動について考える。棒の質量を M，長さを $2L$，ばね定数をそれぞれ k および $8k/5$ とする。棒の重心の鉛直方向の変位を u，水平からの棒の回転角度を θ とする。$u=0$，$\theta=0$ のとき，棒は平衡状態にあるとする。θ は十分小さいと仮定し，$\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ とする。問い (6) 以外は，外力 f は考えない。次の問いに答えよ。

(1) 棒の重心回りの慣性モーメント I は，次式で表されることを示せ：$I = \frac{1}{3}ML^2$
(2) u と θ に関する運動方程式を書け。
(3) 固有角運動数 ω_1 および ω_2 を求めよ。
(4) ω_1 および ω_2 に対する固有モードベクトル $\{\phi_1\}$ および $\{\phi_2\}$ をそれぞれ求めよ。
(5) ω_1 および ω_2 に対する固有振動モードで，棒上で鉛直方向の変位が常にゼロとなる点はそれぞれどこか。棒の重心からの距離を答えよ。ただし，そのような点が棒上にない場合は，ないと答えよ。
(6) 棒の重心より h だけ離れた点に，外力 $f = F\sin\omega t$ が鉛直下向きに働くとき，定常状態の θ と u を時刻 t の関数として求めよ。ただし，ω は任意の定数である。

As shown in Fig. 2, a uniform rigid bar of uniform cross-section and mass density is supported by springs at both ends. The mass of the bar is M, its length is $2L$, and the spring coefficients are k and $8k/5$. The vertical displacement of the bar's center of gravity is represented by u, and the bar's orientation from the horizontal direction is represented by θ. The bar is at the equilibrium when $u = 0$ and $\theta = 0$. The angle θ is assumed to be sufficiently small, and thus $\sin\theta \approx \theta$ and $\cos\theta \approx 1$. The external force, f, is not considered in the problems except for (6).

(1) Show that the bar's moment of inertia around its center of gravity is given by $I = \frac{1}{3}ML^2$.
(2) Derive the equations of motion for u and θ.
(3) Determine the natural angular frequencies, ω_1 and ω_2.
(4) Determine the modal vectors, $\{\phi_1\}$ and $\{\phi_2\}$, corresponding respectively to ω_1 and ω_2.
(5) In the natural vibration modes corresponding to ω_1 and ω_2, determine the distance from the center of gravity to the point where the vertical displacement is always zero. If such a point does not exist on the bar, answer so.
(6) Suppose that the external force, $f = F\sin\omega t$, is given to the bar in the vertical downward direction at the distance h from the bar's center of gravity. Determine u and θ as a function of time, t, at the steady state.

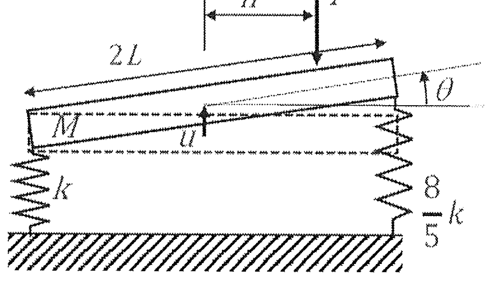


Fig. 2

2021 年 10 月，2022 年 4 月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題

問題用紙

Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

Question Sheets

（2021 年 8 月 26 日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学（専門科目 II） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

試験時間：13 時 30 分～16 時 30 分 (Examination Time：From 13:30 to 16:30)

受験上の注意事項

(1) これは問題用紙です。解答は別冊の解答用紙に記入してください。
(2) 問題用紙は表紙を含み 9 枚あります。
(3) 本表紙およびすべての問題用紙に受験番号を記入してください。
(4) 問題用紙は解答用紙とともに回収します。

Notices

(1) This booklet consists of only question sheets. Use another booklet for answers.
(2) This booklet consists of nine (9) sheets including this front sheet.
(3) Fill in your examinee's number in all sheets including this front sheet.
(4) Return these question sheets together with the answer sheets.

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅱ） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅱ－1（機械材料）(Mechanical Materials)〔1/2〕

問題 1（Question 1）

(1) 室温で純アルミニウムの X 線回折分析を行うと，回折角 2θ が 38.465°，44.713°，65.09° にピークが観察された。それぞれのピークに対応する格子面間隔を計算し，それぞれの面のミラー指数を答えよ。ここで，純アルミニウムの格子定数は 0.40494nm，X 線の波長は 0.154nm とする。

(2) Fig. 1 は Al-Si 合金の平衡状態図である。組成 C_1，C_2，C_3 の合金を液相からゆっくり冷却した。以下の問いに答えよ。

(a) O 点および Q 点の自由度，共存する相の数，成分の数を示せ。

(b) O 点，P 点，R 点，S 点および T 点での合金組織を描け。

(1) When the X-ray diffraction analysis of pure aluminum was performed at room temperature, peaks were observed at diffraction angles 2θ at 38.465 °, 44.713 °and 65.09 °. Calculate the lattice plane spacing corresponding to each peak and answer the Miller index of each plane. Here, the lattice constant of pure aluminum is 0.40494 nm and the wavelength of X-rays is 0.154 nm.

(2) Fig. 1 shows an equilibrium phase diagram of the Al-Si alloy. The alloys of composition C_1, C_2 and C_3 were cooled slowly from the liquid phase. Answer the following questions.

(a) Show the degrees of freedom, the number of coexisting phases and the number of components at points O and Q.

(b) Draw the microstructures of alloy at points O, P, R, S and T.

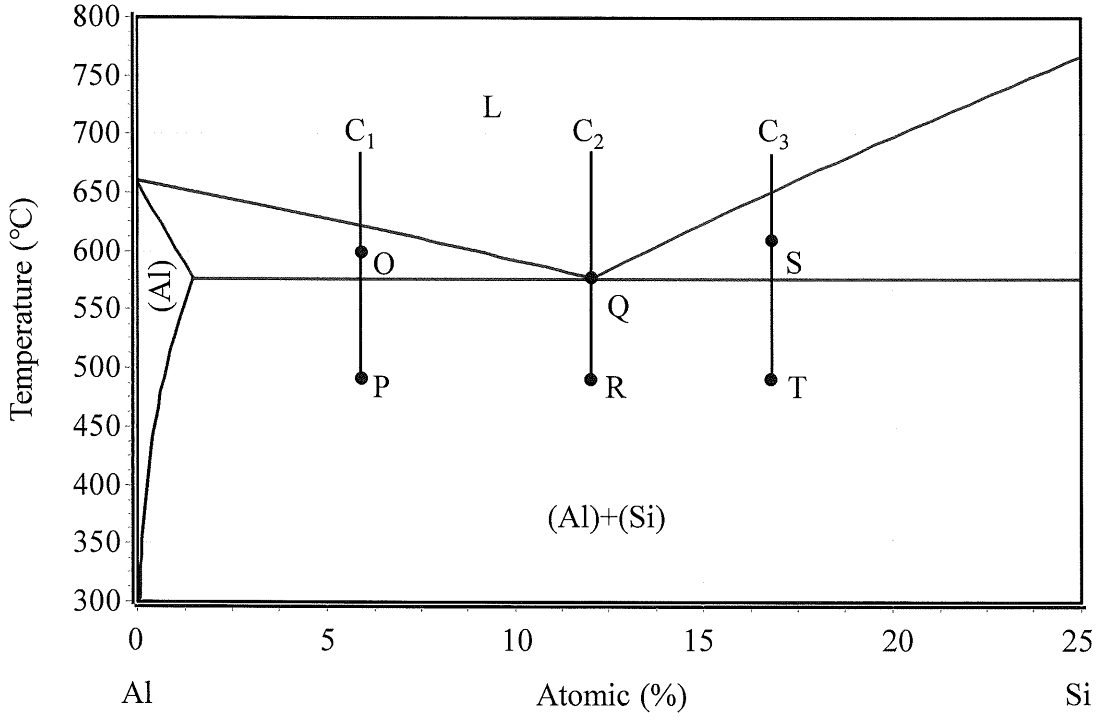


Fig. 1 Equilibrium phase diagram of Al-Si alloy.

2021年10月，2022年4月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering（Master's Course），Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2021年8月26日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ⅱ) Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅱ－1(機械材料)(Mechanical Materials)〔2/2〕

問題2（Question 2）

Table 1は，代表的な3種類(a，b，c)のステンレス鋼の主化学成分(①，②，③，Fe)を示している。
以下の問いに答えよ。

(1) ①，②，③で示す元素は何か，答えよ。

(2) オーステナイト系，フェライト系，マルテンサイト系ステンレス鋼に相当するものをa，b，cから選べ。

(3) マルテンサイト系ステンレス鋼の特徴と用途を述べよ。

(4) オーステナイト系ステンレス鋼SUS304を600～800 °Cで加熱した後，海水などの塩素イオンを含む腐食環境下で使用した場合，粒界腐食を生じる。この粒界腐食のメカニズムを説明せよ。

(5) 耐粒界腐食性を改善する手法を2つ挙げよ。また，SUS304の耐粒界腐食性をより改善した鋼材を2種類挙げ，そのJIS規格名を答えよ。

Table 1 shows main alloying elements (①，②，③，Fe) of three kinds of major stainless steels (a,b,c).
Answer the following questions.

(1) Indicate the elements ①, ② and ③, respectively.

(2) Show which a, b and c correspond to austenite stainless steel, ferritic stainless steel and martensitic stainless steel.

(3) Discribe thc property and usage of the martensitic stainless steel.

(4) Intergranular corrosion occurs when the austenitic stainless steel SUS304 is used in a corrosive environment with chloride ions such as sea water after heating at 600-800 °C . Explain the mechanism of intergranular corrosion.

(5) Describe two methods for improving the intergranular corrosion resistance. And list two kinds of steel which were improved such intergranular corrosion resistance better than SUS304, describe the JIS standard for each steel.

Table 1 代表的なステンレス鋼の主化学成分(mass%)
Table 1 Chemical composition of typical stainless steels (mass%)

	①	②	③	Fe
a	0.15	--	13	Bal.
b	0.08	--	17	Bal.
c	0.05	9	19	Bal.

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅱ） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

［問題用紙］

Ⅱ－2（熱力学）(Thermodynamics)［1/2］

問題1（Question 1）

以下の設問 (a), (b), (c), (d) に答えよ。

(a) 断熱された一定体積の容器の内部が2つの部屋に仕切られている。片方には酸素，他方には窒素が入っており，それぞれの部屋の体積はV_0，温度はT_0，圧力はP_0である。仕切りを準静的に取り除き，十分に時間が経った後のエントロピー変化量ΔSを求めよ。ただし，気体は理想気体，単位は全て国際単位系(SI)とする。

(b) 逆カルノーサイクルにより25 ℃の部屋から熱を奪い，40 ℃の外界に熱を捨てる冷房システムを考える。冷房能力が6 kWのとき，この冷房システムの成績係数と運転に必要な動力を求めよ。

(c) ある純物質の相Aと相Bが平衡状態にある条件は，$g_A = g_B$である。ここで，g_A, g_Bは，各々，相Aと相Bの比ギブズ自由エネルギーである。そして，相Aと相Bの共存曲線は，圧力(P)–温度(T)平面上で$g_A = g_B$を表現する曲線である。関係式$g_A = g_B$の両辺について微分を考えることにより，相Aと相Bの共存曲線の傾き$\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$を相Aと相Bの単位質量あたりの状態量を使って表せ。ただし，各変数が意味する状態量を明確にした上で，相Aの状態量と相Bの状態量を下付き添え字A, Bで区別せよ。

(d) 純水(H_2O)の場合，0 ℃において，圧力増加に対する氷点降下は$\mathrm{d}T/\mathrm{d}P = -0.007524\ \mathrm{K\ atm^{-1}}$である。0 ℃における，水(液体の$H_2O$)の密度を0.99987 g cm^{-3}，氷(固体のH_2O)の密度を0.91675 g cm^{-3}とするとき，0 ℃における純水(H_2O)の融解熱$L\left[\mathrm{cal\ g^{-1}}\right]$を求めよ。ただし，$1\ \mathrm{atm} = 101325\ \mathrm{Pa}$, $1\ \mathrm{cal} = 4.184\ \mathrm{J}$として計算せよ。

Answer the following questions (a), (b), (c), and (d).

(a) A thermally insulated container with a constant volume was divided into two chambers. One of these chambers was filled with oxygen, and the other chamber was filled with nitrogen. Each chamber has a volume of V_0, a temperature of T_0, and a pressure of P_0. Calculate the amount of change in entropy, ΔS, after the divider is quasi-statically removed and enough time has passed. Here, the oxygen and nitrogen are ideal gases, and the units are in the international system of units (SI).

(b) Consider a cooling system employing a reverse Carnot cycle that transfers heat from a room of 25 °C to its surroundings of 40 °C. Calculate the coefficient of performance of this cooling system and the power required to operate this cooling system when the cooling capacity is 6 kW.

(c) The condition for that phases A and B of a pure substance are in thermodynamic equilibrium is expressed as $g_A = g_B$, where g_A and g_B denote the specific Gibbs free energies of phases A and B, respectively. Additionally, the coexistence curve for phases A and B is a curve describing the condition $g_A = g_B$ on the $P-T$ plane, where P and T are pressure and temperature, respectively. By considering the differentials of both sides of the equation $g_A = g_B$, describe the gradient $\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$ of the coexistence curve for phases A and B in terms of specific thermodynamic variables of phases A and B. In describing the answer, show the nomenclature and use subscripts A and B for phases A and B, respectively.

(d) In the case of pure water (H_2O), the freezing-point depression for pressure increase is $\mathrm{d}T/\mathrm{d}P = -0.007524\ \mathrm{K\ atm^{-1}}$ at 0 ℃. Calculate the heat of fusion of pure water at 0 ℃: $L\left[\mathrm{cal\ g^{-1}}\right]$ using the mass density of water (liquid-state H_2O) of 0.99987 g cm^{-3}, the mass density of ice (solid-state H_2O) of 0.91675 g cm^{-3}, $1\ \mathrm{atm} = 101325\ \mathrm{Pa}$, and $1\ \mathrm{cal} = 4.184\ \mathrm{J}$.

試験科目 Subject	機械工学(専門科目 II) Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

II－2（熱力学）（Thermodynamics）〔2/2〕

問題 2（Question 2）

地表面で暖められた空気の塊は，上昇気流となり断熱膨張することで冷却される。この冷却過程に関する設問 (a) ~ (d) に答えよ。空気は理想気体であり，気体定数は 0.287 kJ/(K·kg), 比熱比は 1.40 で温度に依存しないものとする。

(a) 大気の圧力は地表面で 101.3 kPa であり高度 700 m で 93.3 kPa であるとする。地表面において 27 °C であった空気塊が高度 700 m まで上昇したときの温度を求めよ。

(b) この過程で 1 kg の空気塊が外界にした膨張仕事はいくらか。

(c) この過程における 1 kg の空気塊のエントロピー変化とエンタルピー変化を求めよ。

(d) 地表面で 27 °C の水蒸気を含む空気が，700 m まで上昇したとき初めて水蒸気の凝縮により雲が生成した。地表面における空気の相対湿度は何%であったと考えられるか。水の飽和蒸気圧は表 1 の通りである。水蒸気を含んでいても空気の気体定数と比熱比は変わらないものとする。

表 1　水の飽和蒸気圧

温度 [°C]	蒸気圧 [Pa]	温度 [°C]	蒸気圧 [Pa]	温度 [°C]	蒸気圧 [Pa]	温度 [°C]	蒸気圧 [Pa]
16	1818	19	2197	22	2644	25	3167
17	1937	20	2338	23	2809	26	3361
18	2064	21	2487	24	2984	27	3565

When an air parcel is heated on the earth's surface, it becomes ascending air flow and is cooled by adiabatic expansion. Answer the questions (a) ~ (d) about this cooling process. Assume that air is ideal gas with gas constant of 0.287 kJ/(K·kg) and specific-heat ratio of 1.40 independent of temperature.

(a) The pressure of atmosphere is 101.3 kPa on the surface and 93.3 kPa at altitude of 700 m. An air parcel of 27 °C on the surface ascended up to the altitude of 700 m. Calculate the temperature of the air parcel at 700 m.

(b) Calculate the expansion work done by the 1-kg of air parcel to the surroundings by this process.

(c) Calculate the entropy change and enthalpy change of the 1-kg of air parcel by this process.

(d) When an air parcel of 27 °C on the surface containing water vapor ascended up to 700 m, cloud started to be formed by the condensation of water vapor. What was the relative humidity [%] of the air at the surface? The vapor pressures of water are shown in the Table 1 below. Assume that the gas constant and specific-heat ratio are unchanged when the air contains water vapor.

Table 1　Saturation vapor pressure of water

temperature [°C]	vapor pressure [Pa]	temperature [°C]	vapor pressure [Pa]	temperature [°C]	vapor pressure [Pa]	temperature [°C]	vapor pressure [Pa]
16	1818	19	2197	22	2644	25	3167
17	1937	20	2338	23	2809	26	3361
18	2064	21	2487	24	2984	27	3565

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅱ） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

［問題用紙］

Ⅱ－3（流体力学）(Fluid Mechanics)〔1/2〕

問題 1（Question 1）

Fig. 1 に示すように管内を水が下から上に流れており，油が入った逆 U 字管マノメータが管に接続されている。断面①と断面②の断面積はそれぞれ $A_1 = 0.01\ \mathrm{m}^2$，$A_2 = 0.002\ \mathrm{m}^2$，断面①と断面②の間隔は $H = 0.15$ m である。このとき，マノメータの読みは $\varDelta h = 0.1$ m であった。流れは非圧縮，定常，準一次元で，ベルヌーイの定理が適用可能な条件を満たす。管内を流れる体積流量を $Q\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ として，以下の問いに答えよ。但し，水とマノメータ内の油の密度は，それぞれ $\rho_\mathrm{w} = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$，$\rho_\mathrm{oil} = 800\ \mathrm{kg/m}^3$，重力加速度の大きさを$|\boldsymbol{g}| = g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$ とする。

(a) 断面①と断面②における流速 u_1, u_2 [m/s] を，Q と A_1, A_2 を用いて表せ。
(b) ベルヌーイの定理が適用可能な条件を書け。
(c) ベルヌーイの定理から，断面①と断面②における圧力差 $p_1 - p_2$ [Pa]を体積流量 Q の関数として求めよ。
(d) 逆 U 字管マノメータに対して成り立つ圧力と重力の関係から，圧力差 $p_1 - p_2$ [Pa] の値を求めよ。
(e) 体積流量 $Q\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ の値を求めよ。

As shown in Fig. 1, water flows from bottom to top through the tube to which the inverted U-tube manometer containing oil is connected. Cross-sectional areas at the cross sections ① and ② are $A_1 = 0.01\ \mathrm{m}^2$ and $A_2 = 0.002\ \mathrm{m}^2$, respectively. The distance between the cross sections ① and ② is $H = 0.15$ m and the manometer reading is $\varDelta h = 0.1$ m. The volumetric flow rate is $Q\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$. Assume that the flow is incompressible, steady and quasi one-dimensional, and satisfies conditions for applying Bernoulli's principle. Answer the following questions. Here, the densities of the water and the oil are $\rho_\mathrm{w} = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$ and $\rho_\mathrm{oil} = 800\ \mathrm{kg/m}^3$, respectively, and the magnitude of the gravitational acceleration is $|\boldsymbol{g}| = g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$.

(a) Express the flow velocities u_1 and u_2 [m/s] at the cross sections ① and ② using Q, A_1 and A_2.
(b) Show the conditions for applying Bernoulli's principle.
(c) Applying Bernoulli's principle, find the differential pressure $p_1 - p_2$ [Pa] between cross sections ① and ② as a function of Q.
(d) Calculate the differential pressure $p_1 - p_2$ [Pa] from the relationship between pressure and gravity that holds for the inverted U-tube manometer.
(e) Calculate the volumetric flow rate $Q\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$.

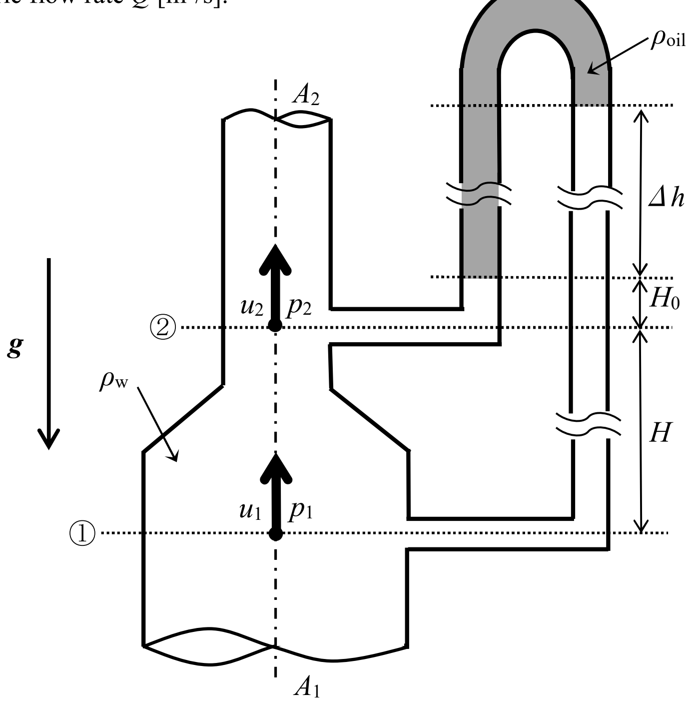


Fig. 1

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅱ） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee’s Number	M

［問題用紙］

Ⅱ－3（流体力学）(Fluid Mechanics)〔2/2〕

問題 2（Question 2）

Fig. 2 に示す，内半径 R の無限長の円筒管内の非圧縮粘性流体 (質量密度がρ, 粘度がμ でいずれも定数) の定常流れを考える。円筒管の軸に沿って z 軸をとった円柱座標系 $(r,\ \phi,\ z)$ において，流れは z 方向の層流で，流速の r, ϕ 成分は 0 ($u_r = u_\phi = 0$) である。この z 方向の定常流れを支配する運動方程式は，

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

である。ここで u_z は流速の z 成分で，p は圧力である。z 方向の圧力勾配は一定で，$\partial p/\partial z = -\alpha \quad (\alpha > 0)$とする。以下の問いに答えよ。

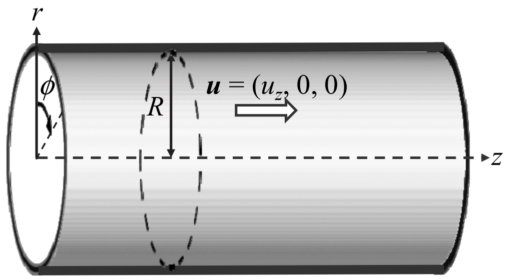


Fig. 2

(a) 流速の z 成分 u_z は r にのみ依存する（$u_z = u_z(r)$）とする。このとき，運動方程式を題意に沿って簡略化し，$u_z(r)$ を求めるための式を求めよ。
(b) (a)で求めた式を解き，$u_z(r)$の一般解を求めよ。
(c) (b)で求めた一般解に対して，$r = 0$ と $r = R$ における境界条件から，円筒管内の速度分布 $u_z(r)$を求めよ。
(d) 円筒管内の体積流量 Q を求めよ。
(e) 円筒管内壁が流体に作用する単位面積当たりの力の z 成分 τを，<u>符号に注意して</u>求めよ。

As shown in Fig. 2, let us consider the steady flow of an incompressible viscous fluid, whose mass density ρ and viscosity μ are constant, through an infinite circular tube whose inner radius is R. In a cylindrical coordinate system with the z-axis along the axis of the circular tube (r, ϕ, z), the fluid flow is a laminar one in the z-direction, and the r- and ϕ-components of flow velocity are zero ($u_r = u_\phi = 0$). The equation of motion governing this steady fluid flow in the z-direction is

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right],$$

where u_z and p are the z-component of the flow velocity and the pressure, respectively. The pressure gradient in the z-direction is constant, $\partial p/\partial z = -\alpha \quad (\alpha > 0)$. Answer the following questions.

(a) Assuming that the z-component of the flow velocity u_z depends only on the coordinate r, $u_z = u_z(r)$, find the equation to be solved to determine $u_z(r)$ by making the equation of motion simplified using given conditions.
(b) Find the general solution of the equation obtained in (a).
(c) Determine the velocity distribution $u_z(r)$ in the circular tube by applying the boundary conditions at $r = 0$ and $r = R$ to the equation obtained in (b).
(d) Calculate the volumetric flow rate Q.
(e) Calculate the z-component of the force per unit area τ acting on the fluid by the inner wall of the tube <u>with the correct sign</u>.

2021年10月，2022年4月入学（October 2021 and April 2022 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering（Master's Course）, Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)
（2021年8月26日実施 / August 26, 2021）

試験科目 Subject	機械工学（専門科目Ⅱ） Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

［問題用紙］

Ⅱ－4（制御工学）（Control Engineering）［1/2］

問題1（Question 1）

以下の問いに答えよ。

1．つぎの微分方程式を考える。

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t), \qquad y(0) = 0$$

(a) rからyへの伝達関数を求めよ。

(b) $r(t) = 1$のとき，微分方程式を$y(t)$について解け。

(c) $r(t) = 1$のとき，$y(t)$の定常応答を求めよ。

2．関数$f(t)$のラプラス変換$F(s)$をつぎで定義する。

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

(a) $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$のとき，$f(t)$の導関数のラプラス変換が$sF(s) - f(0)$であることを証明せよ。

(b) $f(t)$と$g(t)$を用いてつぎの$h(t)$を定義する。

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$g(t)$と$h(t)$のラプラス変換をそれぞれ$G(s)$と$H(s)$で表すとき，$H(s) = F(s)G(s)$を証明せよ。

Answer the following questions.

1. Consider the following differential equation.

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t), \qquad y(0) = 0.$$

(a) Derive the transfer function from r to y.

(b) When $r(t) = 1$, solve the differential equation with respect to $y(t)$.

(c) When $r(t) = 1$, compute the steady-state response of $y(t)$.

2. Let $F(s)$ denote the Laplace transform of a function $f(t)$, defined by

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

(a) When $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$, prove that the Laplace transform of the derivative function of $f(t)$ is $sF(s) - f(0)$.

(b) For $f(t)$ and $g(t)$, define

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Let $G(s)$ and $H(s)$ denote the Laplace transforms of $g(t)$ and $h(t)$, respectively. Prove $H(s) = F(s)G(s)$.

試験科目 Subject	機械工学(専門科目Ⅱ) Mechanical Engineering II	プログラム Program	機械工学 Mechanical Engineering	受験番号 Examinee's Number	M

[問題用紙]

Ⅱ－4(制御工学)(Control Engineering)〔2/2〕

問題2（Question 2）

以下の問いに答えよ。

1. Fig. 1のシステムについて考える。ただし，$G(s)=\frac{(s^2+\alpha)(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$ であり，α は実数である。入力信号 $u(t)=\sin(5t)$ に対し，出力信号 $y(t)$ は定常的に零となるものとする。α の値を求めよ。
2. Fig. 2のシステムについて考える。ただし，$G_1(s)=\frac{\alpha}{s+2}$ および $G_2(s)=\frac{s-3}{s^2-s+1}$ であり，α は実数である。このシステムが安定となるような α が存在するか答えよ。さらに，その理由を答えよ。
3. Fig. 2のシステムについて考える。ただし，$G_1(s)=\frac{11}{\sqrt{10}s+1}$ および $G_2(s)=e^{-Ls}$ であり，L は正の実数である。このシステムが安定となるために L が満たすべき条件を求めよ。

Answer the following questions.

1. Consider the system in Fig. 1. Let $G(s)=\frac{(s^2+\alpha)(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$, where α is a real number. Suppose that the output signal $y(t)$ is zero in the steady-state for the input signal $u(t)=\sin(5t)$. Determine the value of α.
2. Consider the system in Fig. 2. Let $G_1(s)=\frac{\alpha}{s+2}$ and $G_2(s)=\frac{s-3}{s^2-s+1}$, where α is a real number. Answer whether there exists α such that the system becomes stable. In addition, explain the reason for it.
3. Consider the system in Fig. 2. Let $G_1(s)=\frac{11}{\sqrt{10}s+1}$ and $G_2(s)=e^{-Ls}$, where L is a positive real number. Derive the condition of L under which the system is stable.

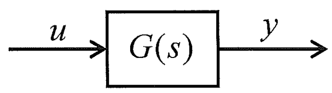


Fig. 1 System

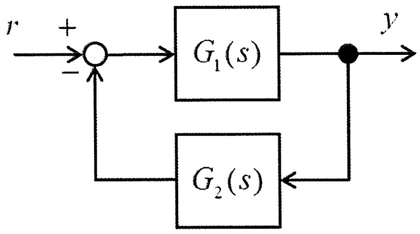


Fig. 2 Feedback system

M 一般入試_機械工学 P_熱力学（2021 年 8 月実施分）略解

熱力学 (Thermodynamics)
2021 年 8 月実施の入試問題の略解 (Brief explanations of the entrance examination in August 2021)

問題 1 (Question 1)

(a) 各気体に対してエントロピー変化が $\frac{P_0V_0}{T_0}\ln\frac{2V_0}{V_0}$ となるから，$\Delta S = 2\frac{P_0V_0}{T_0}\ln 2$。

The entropy change for each gas is $\frac{P_0V_0}{T_0}\ln\frac{2V_0}{V_0}$. Therefore, $\Delta S = 2\frac{P_0V_0}{T_0}\ln 2$.

(b) 逆カルノーサイクルでは $\frac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$ なので，$\mathrm{COP} = \frac{Q_\mathrm{L}}{W} = \frac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H} - Q_\mathrm{L}} \approx 19.87$ となり，$W \approx 302.0\ \mathrm{W}$。

In a reverse Carnot cycle, $\frac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$ holds. Therefore, $\mathrm{COP} = \frac{Q_\mathrm{L}}{W} = \frac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H} - Q_\mathrm{L}} \approx 19.87$ and $W \approx 302.0\ \mathrm{W}$.

(c) $\mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + \upsilon\mathrm{d}P$ を使い，$\mathrm{d}g_\mathrm{A} = \mathrm{d}g_\mathrm{B} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{s_\mathrm{A} - s_\mathrm{B}}{\upsilon_\mathrm{A} - \upsilon_\mathrm{B}}$（$s, \upsilon$ は，各々，比エントロピーと比体積）。

Using the relation $\mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + \upsilon\mathrm{d}P$, $\mathrm{d}g_\mathrm{A} = \mathrm{d}g_\mathrm{B} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{s_\mathrm{A} - s_\mathrm{B}}{\upsilon_\mathrm{A} - \upsilon_\mathrm{B}}$, where s and υ are the specific entropy and specific volume, respectively.

(d) $s_\mathrm{A} - s_\mathrm{B} = \frac{L \times 4.184 \times 10^3}{273.15}$ に注意して，前問の結果を使い，$L = 79.72\ \mathrm{cal\ g^{-1}}$。

Using the relation $s_\mathrm{A} - s_\mathrm{B} = \frac{L \times 4.184 \times 10^3}{273.15}$ and the answer of the question (c), $L = 79.72\ \mathrm{cal\ g^{-1}}$.

問題 2 (Question 2)

(a) 理想気体の等エントロピー関係式を使い，$T_{700} = T_0\left(\frac{p_{700}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293.18\ \mathrm{K} = 20.0\ ℃$。

Using the isentropic relation of the ideal gas, $T_{700} = T_0\left(\frac{p_{700}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293.18\ \mathrm{K} = 20.0\ ℃$.

(b) 理想気体の等エントロピー関係式を使い，$W = 1 \times \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_{700}} p\mathrm{d}\upsilon = 5.00\ \mathrm{kJ}$。

Using the isentropic relation of the ideal gas, $W = 1 \times \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_{700}} p\mathrm{d}\upsilon = 5.00\ \mathrm{kJ}$.

(c) エントロピー変化は $\Delta S = 0$。

エンタルピー変化は，定圧比熱 $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$ を使い，$\Delta H = 1 \times c_p\left(T_{700} - T_0\right) = -7.00\ \mathrm{kJ}$。

The entropy change is $\Delta S = 0$.

Using the specific heat at constant pressure $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$, the enthalpy change is $\Delta H = 1 \times c_p\left(T_{700} - T_0\right) = -7.00\ \mathrm{kJ}$.

(d) 題意と設問(a)の答えより，空気中の水蒸気のモル分率は $\frac{2.338}{93.3}$。これより，地表面における水蒸気の分圧は $\frac{101.3 \times 2.338}{93.3}$ kPa であり，相対湿度は $\frac{101.3 \times 2.338}{93.3 \times 3.565} = 0.712 = 71.2\%$。

From the meaning of the question and the answer of the question (a), the mole fraction of water vapor in the air is $\frac{2.338}{93.3}$. From this, the partial pressure of the water vapor on the earth surface is $\frac{101.3\times 2.338}{93.3}$ kPa. Accordingly, the relative humidity is $\frac{101.3\times 2.338}{93.3\times 3.565}=0.712=71.2\%$.

以上

M 一般入試_機械工学 P_流体力学（2021 年 8 月実施分）略解

流体力学 (Fluid Mechanics)
2021 年 8 月実施の入試問題の略解 (Brief explanations of the entrance examination in August 2021)

問題 1 (Question 1)

(a) $u_1 = \dfrac{Q}{A_1}$, $u_2 = \dfrac{Q}{A_2}$。

(b) 定常・等エントロピー（非圧縮なら非粘性）流れ。
Steady isentropic flow. If the fluid is incompressible, steady inviscid flow.

(c) 設問(a)の答えも使い，$p_1 - p_2 = \dfrac{\rho_w Q^2}{2}\left(\dfrac{1}{A_2^2} - \dfrac{1}{A_1^2}\right) + \rho_w g H$。

Using the answer of the question (a) also, $p_1 - p_2 = \dfrac{\rho_w Q^2}{2}\left(\dfrac{1}{A_2^2} - \dfrac{1}{A_1^2}\right) + \rho_w g H$.

(d) $p_2 - \rho_w g H_0 - \rho_{oil} g \Delta h = p_1 - \rho_w g \left(H + H_0 + \Delta h\right) \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_w g \left(H + \Delta h\right) - \rho_{oil} g \Delta h = 1666\ \mathrm{Pa}$。

(e) 設問(c)(d)の答えより，$Q = \sqrt{\dfrac{p_1 - p_2 - \rho_w g H}{\dfrac{\rho_w}{2}\left(\dfrac{1}{A_2^2} - \dfrac{1}{A_1^2}\right)}} = 0.00128\ \mathrm{m^3\ s^{-1}}$。

From the answers of the questions (c) and (d), $Q = \sqrt{\dfrac{p_1 - p_2 - \rho_w g H}{\dfrac{\rho_w}{2}\left(\dfrac{1}{A_2^2} - \dfrac{1}{A_1^2}\right)}} = 0.00128\ \mathrm{m^3\ s^{-1}}$.

問題 2 (Question 2)

(a) $u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\mu}{\rho}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{\alpha}{\mu} r$。

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{\alpha}{\mu} r \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{\mu} r + \dfrac{c_1}{r} \Rightarrow u_z = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\alpha}{\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2$。

(c) $r = 0$ で u_z が有限で，$r = R$ で $u_z = 0$ だから，$u_z = \dfrac{1}{4}\dfrac{\alpha}{\mu}\left(R^2 - r^2\right)$。

Because u_z is finite at $r = 0$ and $u_z = 0$ at $r = R$, $u_z = \dfrac{1}{4}\dfrac{\alpha}{\mu}\left(R^2 - r^2\right)$.

(d) $Q = \int_0^R u_z 2\pi r \mathrm{d}r = \dfrac{\pi}{8}\dfrac{\alpha}{\mu} R^4$。

(e) $\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{1}{2}\alpha R$。

以上